

定期試験 解答・解説

授業科目名	法理学特講，法論理学入門	2013 年度 : 前期	
		定期試験期間外	
担当教員名	足立英彦	試験日・時間	7 月 29 日 (月)
			8 : 45 ~ 10 : 15

1. 次の演繹を自然演繹法で構成せよ。

(a) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ から $(p \wedge q) \rightarrow r$

解答

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Prem						
2	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">2</td> <td style="padding-left: 10px;">$p \wedge q$</td> <td style="padding-left: 20px;">Prem</td> </tr> </table>	2	$p \wedge q$	Prem				
2	$p \wedge q$	Prem						
3	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">3</td> <td style="padding-left: 10px;">p</td> <td style="padding-left: 20px;">2, \wedge elim</td> </tr> </table> </td> <td style="padding-left: 10px;">$p \rightarrow (q \rightarrow r)$</td> <td style="padding-left: 20px;">1, Reit</td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">3</td> <td style="padding-left: 10px;">p</td> <td style="padding-left: 20px;">2, \wedge elim</td> </tr> </table>	3	p	2, \wedge elim	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	1, Reit	
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">3</td> <td style="padding-left: 10px;">p</td> <td style="padding-left: 20px;">2, \wedge elim</td> </tr> </table>	3	p	2, \wedge elim	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	1, Reit			
3	p	2, \wedge elim						
4	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">4</td> <td style="padding-left: 10px;">$q \rightarrow r$</td> <td style="padding-left: 20px;">3, 4, \rightarrow elim</td> </tr> </table> </td> <td style="padding-left: 10px;">q</td> <td style="padding-left: 20px;">2, \wedge elim</td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">4</td> <td style="padding-left: 10px;">$q \rightarrow r$</td> <td style="padding-left: 20px;">3, 4, \rightarrow elim</td> </tr> </table>	4	$q \rightarrow r$	3, 4, \rightarrow elim	q	2, \wedge elim	
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">4</td> <td style="padding-left: 10px;">$q \rightarrow r$</td> <td style="padding-left: 20px;">3, 4, \rightarrow elim</td> </tr> </table>	4	$q \rightarrow r$	3, 4, \rightarrow elim	q	2, \wedge elim			
4	$q \rightarrow r$	3, 4, \rightarrow elim						
5	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">5</td> <td style="padding-left: 10px;">r</td> <td style="padding-left: 20px;">5, 6, \rightarrow elim</td> </tr> </table> </td> <td style="padding-left: 10px;">$(p \wedge q) \rightarrow r$</td> <td style="padding-left: 20px;">2, 7, \rightarrow intro</td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">5</td> <td style="padding-left: 10px;">r</td> <td style="padding-left: 20px;">5, 6, \rightarrow elim</td> </tr> </table>	5	r	5, 6, \rightarrow elim	$(p \wedge q) \rightarrow r$	2, 7, \rightarrow intro	
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">5</td> <td style="padding-left: 10px;">r</td> <td style="padding-left: 20px;">5, 6, \rightarrow elim</td> </tr> </table>	5	r	5, 6, \rightarrow elim	$(p \wedge q) \rightarrow r$	2, 7, \rightarrow intro			
5	r	5, 6, \rightarrow elim						
6	$q \rightarrow r$	3, 4, \rightarrow elim						
7	q	2, \wedge elim						
8	r	5, 6, \rightarrow elim						
9	$(p \wedge q) \rightarrow r$	2, 7, \rightarrow intro						

解説 戸田山和久『論理学をつくる』226 頁練習問題 66 (1) (b)。

(b) $\neg p \rightarrow q$ から $\neg q \rightarrow p$

解答

1	$\neg p \rightarrow q$	Prem						
2	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">2</td> <td style="padding-left: 10px;">$\neg q$</td> <td style="padding-left: 20px;">Prem</td> </tr> </table>	2	$\neg q$	Prem				
2	$\neg q$	Prem						
3	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">3</td> <td style="padding-left: 10px;">$\neg p$</td> <td style="padding-left: 20px;">Prem</td> </tr> </table> </td> <td style="padding-left: 10px;">$\neg p \rightarrow q$</td> <td style="padding-left: 20px;">1, Reit</td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">3</td> <td style="padding-left: 10px;">$\neg p$</td> <td style="padding-left: 20px;">Prem</td> </tr> </table>	3	$\neg p$	Prem	$\neg p \rightarrow q$	1, Reit	
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">3</td> <td style="padding-left: 10px;">$\neg p$</td> <td style="padding-left: 20px;">Prem</td> </tr> </table>	3	$\neg p$	Prem	$\neg p \rightarrow q$	1, Reit			
3	$\neg p$	Prem						
4	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">4</td> <td style="padding-left: 10px;">q</td> <td style="padding-left: 20px;">3, 4, \rightarrow elim</td> </tr> </table> </td> <td style="padding-left: 10px;">$\neg q$</td> <td style="padding-left: 20px;">2, Reit</td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">4</td> <td style="padding-left: 10px;">q</td> <td style="padding-left: 20px;">3, 4, \rightarrow elim</td> </tr> </table>	4	q	3, 4, \rightarrow elim	$\neg q$	2, Reit	
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">4</td> <td style="padding-left: 10px;">q</td> <td style="padding-left: 20px;">3, 4, \rightarrow elim</td> </tr> </table>	4	q	3, 4, \rightarrow elim	$\neg q$	2, Reit			
4	q	3, 4, \rightarrow elim						
5	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">5</td> <td style="padding-left: 10px;">$\neg\neg p$</td> <td style="padding-left: 20px;">3, 5, 6, \neg intro</td> </tr> </table> </td> <td style="padding-left: 10px;">p</td> <td style="padding-left: 20px;">7, \neg elim</td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">5</td> <td style="padding-left: 10px;">$\neg\neg p$</td> <td style="padding-left: 20px;">3, 5, 6, \neg intro</td> </tr> </table>	5	$\neg\neg p$	3, 5, 6, \neg intro	p	7, \neg elim	
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">5</td> <td style="padding-left: 10px;">$\neg\neg p$</td> <td style="padding-left: 20px;">3, 5, 6, \neg intro</td> </tr> </table>	5	$\neg\neg p$	3, 5, 6, \neg intro	p	7, \neg elim			
5	$\neg\neg p$	3, 5, 6, \neg intro						
6	$\neg p$	3, 5, 6, \neg intro						
7	$\neg q$	2, Reit						
8	$\neg\neg p$	3, 5, 6, \neg intro						
9	p	7, \neg elim						
10	$\neg q \rightarrow p$	2, 8, \rightarrow intro						

解説 戸田山 232 頁練習問題 70 (4)。

2. 次の式が K^{*1} 妥当であることを、真理の木を使って説明せよ。

(a) $\diamond(p \vee q) \rightarrow (\diamond p \vee \diamond q)$

1. $\neg(\diamond(p \vee q) \rightarrow (\diamond p \vee \diamond q))$ (n) NTF
 2. $\diamond(p \vee q)$ (n) 1
 3. $\neg(\diamond p \vee \diamond q)$ (n) 1
 4. $\neg\diamond p$ (n) 3
 5. $\neg\diamond q$ (n) 3
 6. $\Box\neg p$ (n) MN 4
 7. $\Box\neg q$ (n) MN 5
 8. nAk 2, $\diamond R$
 9. $p \vee q$ (k) 2, $\diamond R$
 10. $\neg p$ (k) 6, 8 $\Box R$
 11. $\neg q$ (k) 7, 8 $\Box R$
12. p (k) q (k) 9
 10-12 \otimes 11-12 \otimes

問の論理式を否定した論理式 (1 行目) が K の tree rules に基づく真理の木において閉じたので、問の論理式を否定した論理式の真理値を K -frame におけるいずれかの世界で真とするような、それぞれの世界における原子式の真理値の組み合わせはない。つまり、問の論理式をいずれかの世界で偽とするような K -model (反例) は存在しない。したがって、問の論理式は K 妥当である。

解説 Rod Girle, *Modal Logics and Philosophy* (2nd ed. 2009), p. 40, 3.3 Excercises 1.a.

(b) $\Box\neg p \rightarrow \Box(p \rightarrow \neg p)$

1. $\neg(\Box\neg p \rightarrow \Box(p \rightarrow \neg p))$ (n) NTF
 2. $\Box\neg p$ (n) 1
 3. $\neg\Box(p \rightarrow \neg p)$ (n) 1
 4. $\diamond\neg(p \rightarrow \neg p)$ (n) 3, MN
 5. nAk 4 $\diamond R$
 6. $\neg(p \rightarrow \neg p)$ (k) 4, $\diamond R$
 7. p (k) 6
 8. $\neg\neg p$ (k) 6
 9. $\neg p$ (k) 2, 5, $\Box R$
- 7 - 9 \otimes

問の論理式を否定した論理式が K の tree rules に基づく真理の木において閉じたので、問の論理式は K 妥当である。

解説 Girle, p. 40, 3.3 Excercises 1.b.

*1 $KTr = SW \cup \{\diamond R, \Box R\}$

3. 次の式が K^{*2} 妥当であることを自然演繹法で証明せよ。

$$(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$$

解答

1	$\Box p \wedge \Box q$	Prem
2	$\Box p$	2, \wedge elim
3	$\Box q$	2, \wedge elim
4	\Box	Null Ass
5	p	2, \Box elim
6	q	3, \Box elim
7	$p \wedge q$	5, 6, \wedge intro
8	$\Box(p \wedge q)$	4, 7, \Box intro
9	$(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$	1, 8, \rightarrow intro

解説「法理学特講」5, 1 頁。

4. 次の式が T^{*3} 妥当であることを自然演繹法で証明せよ。

$$p \rightarrow \Diamond p$$

解答

1	p	Prem
2	$\Box \neg p$	Prem
3	p	1, Reit
4	$\neg p$	2 (T)
5	$\neg \Box \neg p$	2, 3, 4, \neg intro
6	$\neg \neg \Diamond p$	5, MN
7	$\Diamond p$	6, \neg elim
8	$p \rightarrow \Diamond p$	1, 7, \rightarrow intro

解説「法理学特講」5, 2 頁。

*2 K-Frame の導出規則: PL (命題論理の導出規則) + MN (modal negation rule) + \Box elim + \Box intro

*3 T-Frame の導出規則: $PL + MN + \Box$ elim + \Box intro + (T)

5. 次の式が Br^{*4} 妥当であることを、真理の木を使って説明せよ。

$$p \rightarrow \Box \Diamond p$$

解答

1. $\neg(p \rightarrow \Box \Diamond p)$ (n) NTF
 2. p (n) 1
 3. $\neg \Box \Diamond p$ (n) 1
 4. $\Diamond \neg \Diamond p$ (n) 3, MN
 5. nAk 4 $\Diamond R$
 6. $\neg \Diamond p$ (k) 4, $\Diamond R$
 7. $\Box \neg p$ (k) 6, MN
 8. kAn Sym
 9. $\neg p$ (n) 7, 8
- 2 – 9 \otimes

問の論理式を否定した論理式が Br の tree rules に基づく真理の木において閉じたので、問の論理式は Br 妥当である。

解説 Girle, p. 37.

6. 次の式が $S2^{*5}$ 妥当であることを、真理の木を使って説明せよ。

$$\Box \Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)$$

解答

1. $\neg(\Box \Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p))$ (n) NTF, $n \in N$
 2. $\Box \Box p$ (n) 1
 3. $\neg \Box \Box (p \rightarrow p)$ (n) 1
 4. $\Diamond \neg \Box (p \rightarrow p)$ (n) 3, MN
 5. nAk 4, $\Diamond RN, k \in S$
 6. $\neg \Box (p \rightarrow p)$ (k) 4, $\Diamond RN$
 7. $\Diamond \neg (p \rightarrow p)$ (k) 6, MN
 8. $\Box p$ (k) 2, 5
 9. kAl $\Diamond RS2, 7, 8, l \in S$
 10. $\neg(p \rightarrow p)$ (l) $\Diamond RS2, 7, 8$
 11. p (l) 10
 12. $\neg p$ (l) 10
- 11 – 12 \otimes

標準世界における問の論理式を否定した論理式が, $S2$ の tree rules に基づく真理の木において閉じたので、問の論理式は $S2$ 妥当である。

解説 Girle, p. 57, 4.4 Exercises 1.b

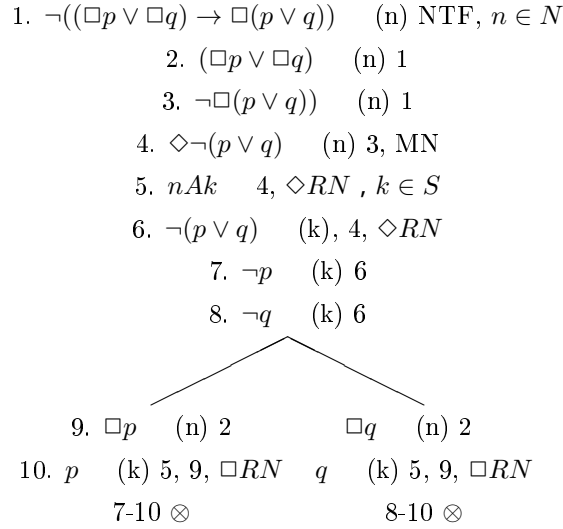
^{*4} $BrTr = SW \cup \{\Diamond R, \Box R, Refl, Sym\}$

^{*5} $S2Tr = SW \cup \{\Diamond RN, \Diamond RS2, \Box RN, \Box RS2, \Box T\}$

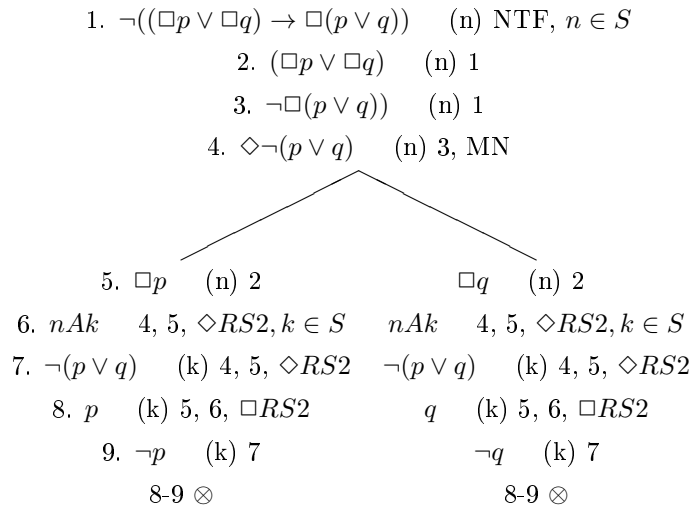
7. 次の式が E2*⁶ 妥当であることを、真理の木を使って説明せよ。

$$(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$$

解答



標準世界における問の論理式を否定した論理式が、S2 の tree rules に基づく真理の木において閉じたので、問の論理式は S2 妥当である。さらに、



非標準世界における問の論理式を否定した論理式も、S2 の tree rules に基づく真理の木において閉じる。したがって、問の論理式は E2 妥当である。

解説 Girle, p. 63, 4.6 Exercises 1.b. なお、問の式は S0.5 妥当でもある。

^{*6} E2Tr = S2Tr

8. 次の式が DT*⁷ 妥当であることを、真理の木を使って説明せよ。

$$Pp \rightarrow P(p \vee q)$$

1. $\neg(Pp \rightarrow P(p \vee q))$ (n) NTF
 2. Pp (n) 1
 3. $\neg P(p \vee q)$ (n) 1
 4. $O\neg(p \vee q)$ (n) 3, MN
 5. nAk 2, PR
 6. p (k) 2, PR
 7. $\neg(p \vee q)$ (k) 4, 5, OR
 8. $\neg p$ (k) 7
- 6-8 ⊗

問の論理式を否定した論理式が DT の tree rules に基づく真理の木において閉じたので、問の論理式は DT 妥当である。

解説 Girle, p. 204. 上記の真理の木は OD (Serial) を使っていないので、問の式(または $\diamond p \rightarrow \diamond(p \vee q)$) は K 妥当でもある。

以上

- 講義に対するご意見ご感想等があれば、答案用紙に記入してください(あくまで任意)。回答 最後の頃はスピードが早すぎてついていけなかった, という趣旨のご意見がありました。全くそのとおりで、申し訳ありません。とくに、自然演繹法の説明に時間を取れなかったことを申し訳なく思います。
- 答案返却方法: 採点終了後に WebClass のメッセージでお知らせします。9月25日 15:30-16:30 に研究室(人社2号館 763)でお渡しします。それ以前でも、本日以降、研究室に来ていただければお渡しできます。不在の場合もありますので、事前にメールまたは WebClass のメッセージで連絡いただければ、在室日時をお知らせします。または、送付先の住所氏名を書き、80円切手を貼った封筒を、〒920-1192 金沢大学法学類 足立英彦に送ってください。

参考(2013年8月7日現在)

- 履修登録 20名(その内共通教育 12名) 聴講 1名, 定期試験受験者 14名(聴講者 1名含む) 定期試験平均点 55.9点(70点満点) 総合平均点 81.1点(100点満点)
 - 総合評価

S(100-90)	A(89-80)	B(79-70)	C(69-60)	不可(59-0)	放棄
6人(29%)	2(10%)	2(10%)	3(14%)	1(5%)	7(33%)
- 定期試験 70点 4名, 67点 1名, 66点 1名。総合 100点 2名, 99点 2名, 96点 1名。

^{*7} $DTTr = SW \cup \{PR(\diamond R), OR(\square R), OD(Serial)\}$