2017年度法学類「法理学」1（10月3日配布）

命題論理（*propositional logic*）入門

1. 命題 (proposition)：真偽（=真理値）が定まっているもの。
   - 原子命題（atomic proposition）[1]: 否定詞・接続詞を含まない命題。
   - 分子命題（molecular proposition）[2]: 原子命題と否定詞・接続詞で構成された命題。分子命題の真偽は原子命題の真偽に応じて定まる[3]。

2. 論理式：命題を記号化したもの。
   - 原子式（atomic formula）：原子命題を記号化したもの。
   - 分子式（molecular formula）：原子式と結合子（否定詞・接続詞を記号化したもの）で構成された論理式。

3. 結合子：否定詞・接続詞を記号化したもの。

   (a) 否定 (negation)
   - 書き方: ¬A　（Aの否定）
   - ルール: ¬Aは，Aが偽であるとき，またそのときにのみ，真である。
   - 真理表

A	¬A
1	0
0	1

   (1: true [真], 0: false [偽])

   (b) 連言 (conjunction)
   - 書き方: A ∧ B　（AとBの連言）
   - ルール: A ∧ Bは，A, Bのすべてが真であるとき，またそのときにのみ，真である。
   - 真理表

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

[1]または単純命題（simple proposition）。
[2]または複合命題（compound proposition）。
[3]したがって，否定詞・接続詞は，原子命題の真偽（の組み合わせ）を分子命題の真偽に割り当てる関数（function）である。

(c) 選言 (disjunction)

- 書き方: A ∨ B　（A と B の選言）
- ルール: A ∨ B は，A, B のすべてが偽でないとき，またそのときにのみ，真である。
- 真理表

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- 排他的選言（exclusive disjunction）と非排他的選言（non-exclusive disjunction）

(d) 条件法 (conditional, implication)

- 書き方: A → B　(A ⊃ B)　（A を前件 (antecedent)，B を後件（concequence）とする条件法）
- ルール: A → B　は，A が偽であるか，または B が真であるとき，またそのときにのみ，真である。
- 真理表

A	B	A → B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(e) 双条件法 (biconditional)

- 書き方: A ↔ B　(A ≡ B)　（A と B の双条件法）
- ルール: A ↔ B　は，A と B が同じ真理値をもつとき，またそのときにのみ，真である。
- 真理表

A	B	A → B	B → A	(A→ B) ∧ (B → A)
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

すなわち，

A	B	A $\leftrightarrow$ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

4. 論理式の形成規則

   (a) 原子式（A, B, C, ... ）は論理式である。

   (b) P を論理式とすると，$\neg$P は論理式である。

   (c) P, Q を論理式とすると, (P $\wedge$ Q)，(P $\vee$ Q)，(P $\to$ Q) はおのおの論理式である。

   (d) (a) (b) (c) によって論理式とされるもののみが論理式である。

5. カッコ省略の規則

   論理式の一番外側のカッコは省略してよい。

6. 練習問題 つぎの論理式の真理表を書け。

(a) $\neg A \land A$

(b) $\neg(A \land \neg B)$

(c) $\neg A \lor B$

(d) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

(e) $(A \to B) \to (A \to (B \lor C))$

7. トートロジーと矛盾式

- トートロジー（tautology，恒真式）: 原子式の真理値の組み合わせにかかわりなく常に真となる式。(記号 : ⊤ または T)
- 事実式（contingency）: 真と偽の両方の値を取りうる式。
- 矛盾式（contradictory formula）:原子式の真理値の組み合わせにかかわりなく常に偽となる式（記号 : ⊥ または ⅃）

8. 論理的に正しい推論（妥当な推論）

(a) 推論（inference, argument）: 与えられた前提から結論を導くこと

(b) 論理的に正しい推論＝妥当な推論（valid inference, deduction）

- 定義 1 : 前提がすべて真であるようなあらゆる場合に，結論も真になるような推論
- 定義 2 : 前提がすべて真なのに結論が偽になるような場合（反例 counterexample）のない推論
- 書き方: ⊨ （ゆえに）
- 場合（Case）: 前提と結論を構成する原子式の真理値の組み合わせ
- 論理的に正しい推論とトートロジーの関係 :
  「A1, A2, ... An，ゆえに C」は論理的に正しい推論である。⇔ 対応する論理式（A1 ∧ A2 ∧ ... ∧ An）→ C はトートロジーである[4]。

(c) 論理的に正しい推論の例

i. A → B, A ⊨ B （肯定式 modus ponens）

- 前提として条件法（A → B）と条件法の前件（antecedent）（A）が与えられるならば， 条件法の後件 (consequent) （B）を結論として導くことは論理的に正しい。
- 真理表による証明

		前提 1	前提 2	結論
A	B	A → B	A	B
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

[4]戸田山和久『論理学をつくる』（名古屋大学出版会，2000 年）66 頁; 野矢茂樹『論理学』40 頁（東京大学出版会，1994 年）。

ii. $A \to B, \neg B \models \neg A$ （否定式 modus tollens）

- 前提として条件法（$A \to B$）と条件法の後件の否定 ($\neg B$) が与えられるならば，条件法の前件の否定（$\neg A$）を導くことは論理的に正しい。
- 真理表による証明

		前提 1	前提 2	結論
A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

iii. $A \wedge B \models A$ (または $A \wedge B \models B$)（$\wedge$の除去に関する推論規則）

- 前提として連言（$A \wedge B$）が与えられるならば，どちらの連言項（A または B）をも結論として導くことは論理的に正しい。
- 真理表による証明

		前提	結論	結論
A	B	$A \wedge B$	A	B
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

(d) 練習問題

次の推論は論理的に正しいか？

i. $A \vee B, \neg A \models B$

ii. $A \to B \models (A \wedge C) \to B$

iii. $A \to B, B \models A$

iv. $A, \neg A \models B$

9. 矛盾（inconsistency，非整合性）

- 論理式の集合 Γ が矛盾している（inconsistent）。$\Leftrightarrow$ Γ に含まれるすべての論理式を同時に真にするような場合（原子式の真理値の組み合わせ）が存在しない。
- 「矛盾からは何でも出てくる」(Ex falso quodlibet.)[5]

10. 整合性（concistency，無矛盾）

- 論理式の集合 Γ が整合的である（consistent）。$\Leftrightarrow$ Γ に含まれるすべての論理式を同時に真にするような場合（原子式の真理値の組み合わせ）が存在する。

11. 論理的同値（logically equivalent）

- 定義：ふたつの分子式 A, B が論理的同値である。$\Leftrightarrow$ A, B は，どのような場合（A, B を構成する原子式の真理値の組み合わせ）にもつねに同じ真理値をとる。
- 書き方：$A \vDash\Dashv B$
- ふたつの論理式 A, B が論理的同値である（$A \vDash\Dashv B$）。$\Leftrightarrow$ A$\leftrightarrow$B はトートロジーである[6]。

[5]戸田山和久『論理学をつくる』65 頁。
[6]戸田山和久『論理学をつくる』50 頁練習問題 10 (4) 参照。