

命題論理 (*propositional logic*) 入門

1. 命題 (proposition) : 真偽 (=真理値) が定まっているもの。
 - 原子命題 (atomic proposition) ¹: 否定詞・接続詞を含まない命題。
 - 分子命題 (molecular proposition) ²: 原子命題と否定詞・接続詞で構成された命題。分子命題の真偽は原子命題の真偽に応じて定まる ³。
2. 論理式 : 命題を記号化したもの。
 - 原子式 (atomic formula) : 原子命題を記号化したもの。
 - 分子式 (molecular formula) : 原子式と結合子 (否定詞・接続詞を記号化したもの) で構成された論理式。
3. 結合子 : 否定詞・接続詞を記号化したもの。

(a) 否定 (negation)

- 書き方: $\neg A$ (A の否定)
- ルール: $\neg A$ は, A が偽であるとき, またそのときにのみ, 真である。
- 真理表

A	$\neg A$
1	0
0	1

(1: true [真], 0: false [偽])

(b) 連言 (conjunction)

- 書き方: $A \wedge B$ (A と B の連言)
- ルール: $A \wedge B$ は, A, B のすべてが真であるとき, またそのときにのみ, 真である。
- 真理表

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

¹または単純命題 (simple proposition)。

²または複合命題 (compound proposition)。

³したがって, 否定詞・接続詞は, 原子命題の真偽 (の組み合わせ) を分子命題の真偽に割り当てる関数 (function) である。

(c) 選言 (disjunction)

- 書き方: $A \vee B$ (A と B の選言)
- ルール: $A \vee B$ は, A, B のすべてが偽でないとき, またそのときにのみ, 真である。

- 真理表

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- 排他的選言 (exclusive disjunction) と非排他的選言 (non-exclusive disjunction)

(d) 条件法 (conditional, implication)

- 書き方: $A \rightarrow B$ ($A \supset B$) (A を前件 (antecedent), B を後件 (consequence) とする条件法)
- ルール: $A \rightarrow B$ は, A が偽であるか, または B が真であるとき, またそのときにのみ, 真である。

- 真理表

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(e) 双条件法 (biconditional)

- 書き方: $A \leftrightarrow B$ ($A \equiv B$) (A と B の双条件法)
- ルール: $A \leftrightarrow B$ は, A と B が同じ真理値をもつとき, またそのときにのみ, 真である。

- 真理表

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

すなわち,

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

4. 論理式の形成規則

- (a) 原子式 (A, B, C, ...) は論理式である。
- (b) P を論理式とすると, $\neg P$ は論理式である。
- (c) P, Q を論理式とすると, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$ はおのおの論理式である。
- (d) (a) (b) (c) によって論理式とされるもののみが論理式である。

5. カッコ省略の規則

論理式の一番外側のカッコは省略してよい。

6. 練習問題 つぎの論理式の真理表を書け。

(a) $\neg A \wedge A$

(b) $\neg(A \wedge \neg B)$

(c) $\neg A \vee B$

(d) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

(e) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$

7. トートロジーと矛盾式

- トートロジー (tautology, 恒真式) : 原子式の真理値の組み合わせにかかわらず常に真となる式。(記号: \top または T)
- 事実式 (contingency) : 真と偽の両方の値を取りうる式。
- 矛盾式 (contradictory formula) : 原子式の真理値の組み合わせにかかわらず常に偽となる式 (記号: \perp または L)

8. 論理的に正しい推論 (妥当な推論)

- (a) 推論 (inference, argument) : 与えられた前提から結論を導くこと
- (b) 論理的に正しい推論 = 妥当な推論 (valid inference, deduction)
- 定義 1 : 前提がすべて真であるようなあらゆる場合に、結論も真になるような推論
 - 定義 2 : 前提がすべて真なのに結論が偽になるような場合 (反例 counterexample) のない推論
 - 書き方: \vdash (ゆえに)
 - 場合 (Case) : 前提と結論を構成する原子式の真理値の組み合わせ
 - 論理的に正しい推論とトートロジーの関係 :
「 A_1, A_2, \dots, A_n , ゆえに C 」は論理的に正しい推論である。 \Leftrightarrow 対応する論理式 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow C$ はトートロジーである⁴。

(c) 論理的に正しい推論の例

i. $A \rightarrow B, A \vdash B$ (肯定式 modus ponens)

- 前提として条件法 ($A \rightarrow B$) と条件法の前件 (antecedent) (A) が与えられるならば、条件法の後件 (consequent) (B) を結論として導くことは論理的に正しい。
- 真理表による証明

		前提 1	前提 2	結論
A	B	$A \rightarrow B$	A	B
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

⁴戸田山和久『論理学をつくる』(名古屋大学出版会, 2000年) 66頁; 野矢茂樹『論理学』40頁(東京大学出版会, 1994年)。

ii. $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$ (否定式 modus tollens)

- 前提として条件法 ($A \rightarrow B$) と条件法の後件の否定 ($\neg B$) が与えられるならば, 条件法の前件の否定 ($\neg A$) を導くことは論理的に正しい。
- 真理表による証明

		前提 1	前提 2	結論
A	B	$A \rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

iii. $A \wedge B \vdash A$ (または $A \wedge B \vdash B$) (\wedge の除去に関する推論規則)

- 前提として連言 ($A \wedge B$) が与えられるならば, どちらの連言項 (A または B) をも結論として導くことは論理的に正しい。
- 真理表による証明

		前提	結論	結論
A	B	$A \wedge B$	A	B
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

(d) 練習問題

次の推論は論理的に正しいか？

i. $A \vee B, \neg A \models B$

ii. $A \rightarrow B \models (A \wedge C) \rightarrow B$

iii. $A \rightarrow B, B \models A$

iv. $A, \neg A \models B$

9. 矛盾 (inconsistency, 非整合性)

- 論理式の集合 Γ が矛盾している (inconsistent)。 $\Leftrightarrow \Gamma$ に含まれるすべての論理式を同時に真にするような場合 (原子式の真理値の組み合わせ) が存在しない。
- 「矛盾からは何でも出てくる」 (Ex falso quodlibet.)⁵

10. 整合性 (consistency, 無矛盾)

- 論理式の集合 Γ が整合的である (consistent)。 $\Leftrightarrow \Gamma$ に含まれるすべての論理式を同時に真にするような場合 (原子式の真理値の組み合わせ) が存在する。

11. 論理的同値 (logically equivalent)

- 定義: ふたつの分子式 A, B が論理的同値である。 $\Leftrightarrow A, B$ は, どのような場合 (A, B を構成する原子式の真理値の組み合わせ) にもつねに同じ真理値をとる。
- 書き方: $A \models B$
- ふたつの論理式 A, B が論理的同値である ($A \models B$)。 $\Leftrightarrow A \leftrightarrow B$ はトートロジーである⁶。

⁵戸田山和久『論理学をつくる』65頁。

⁶戸田山和久『論理学をつくる』50頁練習問題10(4)参照。