

定期試験解答

授業科目名	特講（様相論理入門）	2021年度：1Q	
		定期試験期間内	
担当教員名	足立英彦	試験日・時間	6月2日（水）
			9:00 ~ 10:00

1. つぎの論理式の真理表を書け。また、それは恒真式、矛盾式、事実式のいずれであるか？（10点）

$$\neg A \supset (A \supset B)$$

解答 恒新式

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \supset (A \supset B)$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

2. つぎの論理式は恒真か。タブローを使って判定せよ。（10点）

$$(A \supset B) \supset (A \supset (B \vee C))$$

解答 恒真

$$\begin{array}{c} \neg((A \supset B) \supset (A \supset (B \vee C))) \\ A \supset B \\ \neg(A \supset (B \vee C)) \\ A \\ \neg(B \vee C) \\ \neg B \\ \neg C \\ \wedge \\ \neg A \quad B \\ \otimes \quad \otimes \end{array}$$

解説 ある論理式が恒真（トートロジー）であることと、その式を否定した式が矛盾式（真になる場合のない式）であることは同じである。そのため、問の式を否定した式を展開してできるタブローの経路がすべて閉じるならば、つまり問の式を否定した式が矛盾式であれば、問の式は恒真であることが分かる。問の式をそのまま展開すると、矛盾式である（すべての経路が閉じる）か、矛盾式でない（解放経路がある）かは判明するが、後者の場合、矛盾式でない式は事実式、恒真式のいずれかであるので、その式が恒真式かどうかまでは判別できない。

3. つぎの推論は論理的に正しいか（妥当か）。真理表を使って判定せよ。

$$A, \neg A \text{ から（ゆえに） } B \quad (10 \text{ 点})$$

解答

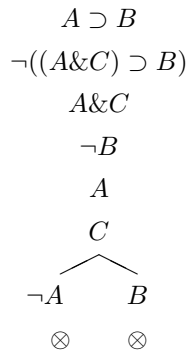
前提 1		前提 2	結論
$A$	$B$	$\neg A$	$B$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

この推論において、前提がすべて真の場合はない。したがって、前提がすべて真で結論が偽になる場合、すなわち反例もない。したがって、この推論は論理的に正しい（妥当である）。

4. つぎの推論は論理的に正しいか（妥当か）。タブローを使って判定せよ。（各 10 点）

$A \supset B$  から  $(A \& C) \supset B$

解答 論理的に正しい。



5. つぎの推論を自然演繹法で構成せよ。（各 10 点）

(a)  $P \supset Q, Q \supset R$  から  $P \supset R$

解答 \*1

1	$P \supset Q$	prem
2	$Q \supset R$	prem
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"><math>P</math></div>	Prem
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"><math>P \supset Q</math></div>	reit
5	$Q$	MP
6	$Q \supset R$	reit
7	$R$	MP
8	$P \supset R$	impl intro

\*1 戸田山和久『論理学をつくる』練習問題 65 (1)(b)。

(b)  $\neg(P \vee Q)$  から  $\neg P \& \neg Q$

解答\*2

1	$\neg(P \vee Q)$	prem
2	$P$	asp
3	$P \vee Q$	dis intro
4	$\neg(P \vee Q)$	reit
5	$\perp$	
6	$\neg P$	RAA
7	$Q$	asp
8	$P \vee Q$	dis intro
9	$\neg(P \vee Q)$	reit
10	$\perp$	
11	$\neg Q$	RAA
12	$\neg P \& \neg Q$	conj intro

(c)  $(x)(Px \supset Qx), Pa$  から  $(\exists x)Qx$  (述語論理の自然演繹法で)

解答\*3

1	$(x)(Px \supset Qx)$	prem
2	$Pa$	prem
3	$Pa \supset Qa$	(x) elim
4	$Qa$	MP
5	$(\exists x)Qx$	$\exists$ intro

---

\*2 戸田山練習問題 69 (2)。

\*3 戸田山練習問題 72 (1)。

(d)  $(x)(Px \supset Qx), (\exists x)Px$  から  $(\exists x)Qx$  (自由論理の自然演繹法で)

解答

1	$(x)(Px \supset Qx)$	prem
2	$(\exists x)Px$	prem
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>Ea \&amp; Pa</math></div>	asp
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>Ea</math></div>	conj elim
5	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>Ea \supset (Pa \supset Qa)</math></div>	(x) elim
6	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>Pa \supset Qa</math></div>	MP
7	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>Pa</math></div>	conj elim
8	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>Qa</math></div>	MP
9	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>Ea \&amp; Qa</math></div>	conj intro
10	$(\exists x)Qx$	$\exists$ intro
11	$(\exists x)Qx$	$\exists$ elim

**解説** 授業で配布した解答例(レジュメ第3章練習問題2)に $\exists$ 除去規則の但し書き違反(キャンセルされていない前提にaが現れている)がありました。そのため、レジュメの解答例通りの答案も正解としました。

6. つぎの証明を自然演繹法で構成せよ。(各5点)

(a)  $\Box p \rightarrow \Box(p \vee q)$

解答

1	$\Box$	
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\Box p</math></div>	asp
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\Box</math></div>	
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>p</math></div>	T-reit
5	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>p \vee q</math></div>	disj intro
6	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>\Box(p \vee q)</math></div>	nec intro
7	$\Box p \supset \Box(p \vee q)$	impl intro
8	$\Box(\Box p \supset \Box(p \vee q))$	nec intro
9	$\Box p \rightarrow \Box(p \vee q)$	def

(b)  $\neg\Diamond p \supset \neg\Box p$

解答 1

1	$\neg\Diamond p$	asp
2	$\Box\neg p$	def
3	$\neg p$	nec elim
4	$\Diamond\neg p$	poss intro
5	$\neg\Box p$	def
6	$\neg\Diamond p \supset \neg\Box p$	impl intro

解答 2

1	$\neg\Diamond p$	asp																								
2	$\Box\neg p$	def																								
3	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">3</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"><math>\Box p</math></td> <td style="padding-left: 20px;">asp</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">4</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\Box</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>p</math></td> <td>T-reit</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\neg p</math></td> <td>T-reit</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\perp</math></td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\Box\perp</math></td> <td>nec intro</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\perp</math></td> <td>nec elim</td> </tr> </table>	3	$\Box p$	asp	4	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">4</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\Box</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>p</math></td> <td>T-reit</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\neg p</math></td> <td>T-reit</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\perp</math></td> <td></td> </tr> </table>	4	$\Box$		5	$p$	T-reit	6	$\neg p$	T-reit	7	$\perp$			8	$\Box\perp$	nec intro	9	$\perp$	nec elim	
3	$\Box p$	asp																								
4	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">4</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\Box</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>p</math></td> <td>T-reit</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\neg p</math></td> <td>T-reit</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>\perp</math></td> <td></td> </tr> </table>	4	$\Box$		5	$p$	T-reit	6	$\neg p$	T-reit	7	$\perp$														
4	$\Box$																									
5	$p$	T-reit																								
6	$\neg p$	T-reit																								
7	$\perp$																									
8	$\Box\perp$	nec intro																								
9	$\perp$	nec elim																								
10	$\neg\Box p$	RAA																								
11	$\neg\Diamond p \supset \neg\Box p$	impl intro																								

(c)  $\Box p \supset (q \rightarrow \Box p)$  (S4 システムで証明)

解答

1	$\Box p$	asp
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"><math>\Box</math></div>	
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"><math>q</math></div>	asp
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"><math>\Box p</math></div>	S4-reit
5	$q \supset \Box p$	imol intro
6	$\Box(q \supset \Box p)$	nec intro
7	$\Box p \supset \Box(q \supset \Box p)$	impl intro
8	$\Box p \supset (q \rightarrow \Box p)$	def

7. つぎの推論を qK (述語論理のルール+ K システムのルール) で構成せよ。(5 点)

$\Box(x)(Px \supset Qx), \neg\Box(x)\neg Px$  から  $\neg\Box(x)\neg Qx$

解答 1

1	$\Box(x)(Px \supset Qx)$	prem
2	$\neg\Box(x)\neg Px$	prem
3	$\Box(x)\neg Qx$	asp
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"><math>\Box</math></div>	
5	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; border-bottom: 1px solid black;"><math>(x)(Px \supset Qx)</math></div>	T-reit
6	$(x)\neg Qx$	T-reit
7	$Pa \supset Qa$	(x) elim
8	$\neg Qa$	(x) elim
9	$\neg Pa$	MT
10	$(x)\neg Px$	(x) intro
11	$\Box(x)\neg Px$	nec intro
12	$\neg\Box(x)\neg Px$	reit
13	$\perp$	
14	$\neg\Box(x)\neg Qx$	RAA

解答 2

1	$\Box(x)(Px \supset Qx)$		prem
2	$\neg\Box(x)\neg Px$		prem
3	$\Diamond\neg(x)\neg Px$		def
4	$\Diamond(\exists x)Px$		def
5	$\Box$		
6	$(\exists x)Px$		asp
7	$(x)(Px \supset Qx)$		T-reit
8	$Pa$		asp
9	$Pa \supset Qa$		(x) elim
10	$Qa$		MP
11	$(\exists x)Qx$		$\exists$ intro
12	$(\exists x)Qx$		$\exists$ elim
13	$(\exists x)Px \supset (\exists x)Qx$		impl intro
14	$\Box((\exists x)Px \supset (\exists x)Qx)$		nec intro
15	$\Diamond(\exists x)Qx$		poss elim
16	$\neg\Box(x)\neg Qx$		def

参考情報 (2021 年 6 月 2 日現在)

● 期末試験結果

履修登録数	定期試験受験者数	放棄	定期試験平均点
9	9	0	75.6

- 期末試験上位得点者: 100 点 2 名。