

定期試験解答

授業科目名	特講 A (様相論理入門)	2023 年度 : 1Q	
		定期試験期間内	
担当教員名	足立英彦	試験日・時間	6 月 5 日 (月)
			9 : 00 ~ 10 : 00

1. $v(p) = 1, v(q) = 0, v(r) = 1$ であるとする。このとき、次の値を求めなさい。(各 2 点)

(a) $v(p \wedge (q \vee \neg r))$

解答 0

解説 論理式の構造を表す木*1にそれぞれの論理式の値を書くか、真理表を書いて答に至る過程を示すことが望ましい。

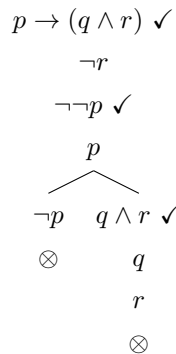
(b) $v(((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q)$

解答 0

2. 以下の推論が妥当であるかどうかをタブローを使って示し、非妥当の場合は反例モデルも示しなさい。(各 7 点)

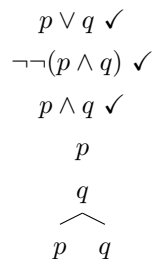
(a) $p \rightarrow (q \wedge r), \neg r \models \neg p$

解答 妥当



(b) $p \vee q \models \neg(p \wedge q)$

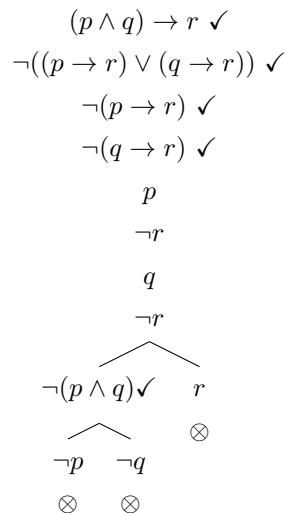
解答 非妥当、反例モデル： $v(p) = 1, v(q) = 1$



*1 大西琢朗『論理学』(昭和堂、2021 年) 10 頁。

(c) $(p \wedge q) \rightarrow r \models (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

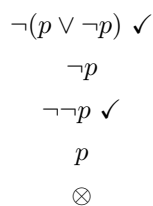
解答 妥当



3. 以下の論理式がトートロジーであることをタブローを使って示しなさい。(7点)

$p \vee \neg p$

解答 トートロジー



4. 次の推論が K 妥当であるかどうかをタブローを使って示し、K 非妥当の場合は反例モデルを示しなさい。(各7点)

(a) $\Box p \rightarrow \Box q \models \Box(p \rightarrow q)$

解答 K 非妥当、(反例モデルは省略)

解説 反例モデル (フレーム+付値) は図で示すのがよい。

$$\begin{array}{c}
\Box p \rightarrow \Box q (w) \checkmark \\
\neg \Box (p \rightarrow q) (w) \checkmark \\
\Diamond \neg (p \rightarrow q) (w) \checkmark \\
wRx \\
\neg (p \rightarrow q) (x) \checkmark \\
p (x) \\
\neg q (x) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg \Box p (w) \checkmark \quad \Box q (w) \\
\Diamond \neg p (w) \checkmark \quad q (x) \\
wRy \quad \otimes \\
\neg p (y)
\end{array}$$

(b) $\Box p \wedge \Box q \models \Box (p \wedge q)$

解答 K 妥当

$$\begin{array}{c}
\Box p \wedge \Box q (w) \checkmark \\
\neg \Box (p \wedge q) (w) \checkmark \\
\Diamond \neg (p \wedge q) (w) \checkmark \\
wRx \\
\neg (p \wedge q) (x) \checkmark \\
\Box p (w) \\
\Box q (w) \\
p (x) \\
q (x) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg p (x) \quad \neg q (x) \\
\otimes \quad \otimes
\end{array}$$

5. 次の推論は少なくともどのフレームで妥当かをタブローを使って示しなさい。(各7点)

(a) $\models \Box (p \rightarrow \Diamond p)$

解答 KT 妥当

$$\begin{array}{c}
\neg \Box (p \rightarrow \Diamond p) (w) \checkmark \\
\Diamond \neg (p \rightarrow \Diamond p) (w) \checkmark \\
wRx \\
\neg (p \rightarrow \Diamond p) (x) \checkmark \\
p (x) \\
\neg \Diamond p (x) \checkmark \\
\Box \neg p (x) \\
xRx \text{ refl.} \\
\neg p (x) \\
\otimes
\end{array}$$

(b) $\diamond\diamond p \models \diamond p$

解答 K4 妥当

$\diamond\diamond p (w) \checkmark$
 $\neg\diamond p (w) \checkmark$
 $\Box\neg p (w)$
 wRx
 $\diamond p (x) \checkmark$
 xRy
 $p (y)$
 wRy trans.
 $\neg p (y)$
 \otimes

(c) $\diamond\Box p \models \Box p$

解答 K4B (K5) 妥当

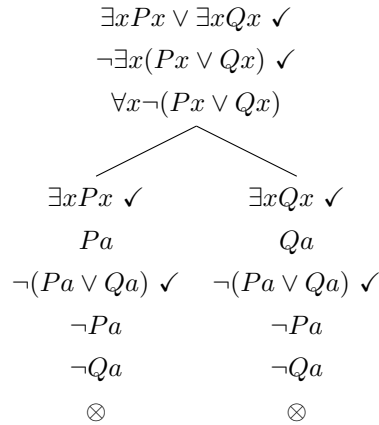
$\diamond\Box p (w) \checkmark$
 $\neg\Box p (w) \checkmark$
 $\diamond\neg p (w) \checkmark$
 wRx
 $\neg p (x)$
 wRy
 $\Box p (y)$
 yRw sym.
 yRx trans.
 $p (x)$
 \otimes

解説 対称的 (symmetrical) かつ推移的 (transitive) な到達可能性関係の代わりにユークリッド的 (euclidean) な関係を仮定してもよい (wRx, wRy ゆえに yRx)。

6. 次の推論が妥当であるかどうかをタブローを使って示し、非妥当の場合は反例モデルも示しなさい。
(各7点)

(a) $\exists xPx \vee \exists xQx \vdash \exists(Px \vee Qx)$

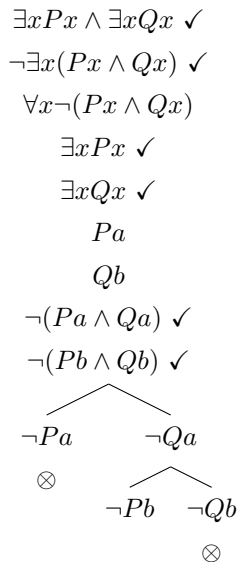
解答 妥当



解説 教科書では個体領域は空でない集合であることが前提とされていたため*2、この前提に従って、3行目 $\forall x \neg(Px \vee Qx)$ の x に a を代入して、 $\neg(Pa \vee Qa)$ を4行名に書いている答案も正解とした。しかし、問にも3行目までにも個体 a は現れていないので、本来はそのような代入はできない。

(b) $\exists xPx \wedge \exists xQx \vdash \exists x(Px \wedge Qx)$

解答 非妥当、反例モデル $D = \{a, b\}, v(P) = \{a\}, v(Q) = \{b\}$



7. 次の推論が妥当であるかどうかをタブローを使って示し、非妥当の場合は反例モデルも示しなさい。
(各7点)

(a) $\neg(p \supset q) \vdash p$

*2 大西『論理学』93頁。

解答 非妥当、(反例モデルは省略)

解説 反例モデル(フレーム+付値)は図で示すのがよい。

$$\begin{aligned} & \neg \Box(p \rightarrow q) (w) \checkmark \\ & \quad \neg p \\ & \Diamond \neg(p \rightarrow q) (w) \checkmark \\ & \quad wRx \\ & \neg(p \rightarrow q) (x) \checkmark \\ & \quad p(x) \\ & \quad \neg q(x) \end{aligned}$$

(b) $\models p \rightarrow (q \rightarrow q)$

解答 妥当

$$\begin{aligned} & \neg \Box(p \rightarrow (\Box(q \rightarrow q))) (w) \checkmark \\ & \Diamond \neg(p \rightarrow (\Box(q \rightarrow q))) (w) \checkmark \\ & \quad wRx \\ & \neg(p \rightarrow (\Box(q \rightarrow q))) (x) \checkmark \\ & \quad p(x) \\ & \quad \neg \Box(q \rightarrow q) (x) \checkmark \\ & \quad \Diamond \neg(q \rightarrow q) (x) \checkmark \\ & \quad \quad xRy \\ & \quad \neg(q \rightarrow q) (y) \checkmark \\ & \quad \quad q(y) \\ & \quad \quad \neg q(y) \\ & \quad \quad \otimes \end{aligned}$$

8. この授業に対するご意見や感想、改善の提案などがあれば自由に書いてください。(何らかの記入があれば5点)

回答

- 問題点の指摘として、板書がカメラの画角の外になることがしばしばありストレスだった、というご意見がありました。全くその通りでしたので、もう少しカメラを後ろに置くか、さらに広角のカメラを試すなどして改善したいと思います。
- 授業の内容は概ね好評だったようですが、それは大西先生の素晴らしい教科書と分かりやすいYouTube動画のおかげです。教科書は授業開始後すぐにご購入ください!
- この授業と法学との関係について、一方で、「法学と数学が切り離せないことを実感できた」という肯定的なご意見があり、他方で、「この授業がどう法学と関係するのかよく分からなかった」という否定的なご意見もありました。法学との関係で最も重要なのは義務論理なのですが、この授業ではほとんど扱えませんでした。法学と論理学の関係について考えたい方は、3Qの「法理学A」をぜひ履修してください。
- 拙い授業に最後までお付き合いいただき、ありがとうございました。

参考情報（2023年6月8日現在）

- 定期試験結果

履修登録数	定期試験受験者数	放棄	定期試験平均点
16	16	0	79

- 成績分布

S(100-90)	A(89-80)	B(79-70)	C(69-)	不可	放棄
6	3	1	5	1	0

- 定期試験上位得点者: 100点3名、99点1名、98点2名。
- 定期試験の得点58点の者に追試を実施し、理解を確認できたのでCの評価とした。
- 履修者16名のうちわけ: 法7、経3、数物科学4、フロンティア工学1、保健1