

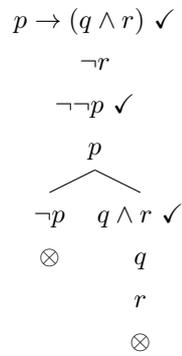
定期試験解答・解説

授業科目名	特講 A (様相論理入門)	2024 年度 : Q1	
		定期試験期間内	
担当教員名	足立英彦	試験日・時間	6 月 3 日 (月)
			9 : 00 ~ 10 : 00

1. 次の推論が妥当であるかどうかをタブローを使って示し、非妥当の場合は反例モデルも示しなさい。
(各 7 点)

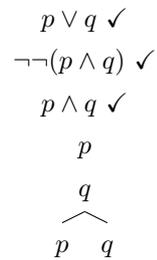
(a) $p \rightarrow (q \wedge r), \neg r \models \neg p$

解答 妥当



(b) $p \vee q \models \neg(p \wedge q)$

解答 非妥当、反例モデル: $v(p) = 1, v(q) = 1$



2. 次の推論が K 妥当であるかどうかをタブローを使って示し、K 非妥当の場合は反例モデルを示しなさい。なお、世界は x, y, z, \dots とする。(各 7 点)

(a) $\models \Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$

解答 K 妥当

$$\begin{array}{c}
 \neg(\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)) (x) \checkmark \\
 \Diamond(p \vee q) (x) \checkmark \\
 \neg(\Diamond p \vee \Diamond q) (x) \checkmark \\
 \neg\Diamond p (x) \checkmark \\
 \neg\Diamond q (x) \checkmark \\
 \Box\neg p (x) \\
 \Box\neg q (x) \\
 xRy \\
 p \vee q (y) \\
 \neg p (y) \\
 \neg q (y) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 p (y) \quad q (y) \\
 \otimes \quad \otimes
 \end{array}$$

解説 授業では w から世界を始めていましたが、なぜか問では x から始めるよう指示してしまいました。これは単なる間違いで、本来は「世界は w, x, y, \dots とする」とするべきでした。解答は x から始めています。

(b) $\Box p \rightarrow \Box q \models \Box(p \rightarrow q)$

解答 K 非妥当。反例モデルは省略 (付値は $v(y, p) = 1, v(y, q) = 0, v(z, p) = 0$)

解説 反例モデル (フレーム+付値) の作図が (私の Latex 運用能力では) できないので、のちほど手書きの図を WebClass に掲載します。

$$\begin{array}{c}
 \Box p \rightarrow \Box q (x) \checkmark \\
 \neg\Box(p \rightarrow q) (x) \checkmark \\
 \Diamond\neg(p \rightarrow q) (x) \checkmark \\
 xRy \\
 \neg(p \rightarrow q) (y) \checkmark \\
 p (y) \\
 \neg q (y) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \neg\Box p (x) \checkmark \quad \Box q (x) \\
 \Diamond\neg p (x) \checkmark \quad q (y) \\
 xRz \quad \otimes \\
 \neg p (z)
 \end{array}$$

3. 次の推論は少なくともどのフレームで妥当かをタブローを使って示しなさい。なお、一部の frame (と、それが仮定する accessibility relation) の名称は以下の通り。KD (serial), KT (reflexive), K4 (transitive), KB (symmetrical)。euclidean relation は使わないこと。(各 7 点)

(a) $\Box p \models \Diamond p$

解答 KD 妥当

$$\begin{array}{l} \Box p (x) \\ \neg \Diamond p (x) \checkmark \\ \Box \neg p (x) \\ xRy \text{ serial} \\ p (y) \\ \neg p (y) \\ \otimes \end{array}$$

解説 この推論は KT フレームでも妥当だが、KT よりも KD の方が弱い。

(b) $\Diamond \Box p \models \Box p$

解答 K4B (K5) 妥当

$$\begin{array}{l} \Diamond \Box p (x) \checkmark \\ \neg \Box p (x) \checkmark \\ \Diamond \neg p (x) \checkmark \\ xRy \\ \neg p (y) \\ xRz \\ \Box p (z) \\ zRx \text{ sym.} \\ zRy \text{ trans.} \\ p (y) \\ \otimes \end{array}$$

別解

$$\begin{array}{l} \Diamond \Box p (x) \checkmark \\ \neg \Box p (x) \checkmark \\ \Diamond \neg p (x) \checkmark \\ xRy \\ \Box p (y) \\ xRz \\ \neg p (z) \\ yRx \text{ sym.} \\ yRz \text{ trans.} \\ p (z) \\ \otimes \end{array}$$

解説 $\Diamond \Box p$ と $\Diamond p$ から、それぞれ別の世界を作らなければならないことに注意。

(c) $\Diamond\Diamond p \models \Diamond p$

解答 K4 妥当

$\Diamond\Diamond p(x) \checkmark$
 $\neg\Diamond p(x) \checkmark$
 $\Box\neg p(x)$
 xRy
 $\Diamond p(y) \checkmark$
 yRz
 $p(y)$
 xRz trans.
 $\neg p(z)$
 \otimes

(d) $\Box\Box p \models \Box p$

解答 KT 妥当

$\Box\Box p(x)$
 $\neg\Box p(x) \checkmark$
 $\Diamond\neg p(x) \checkmark$
 xRy
 $\neg p(y)$
 $\Box p(y)$
 yRy refl.
 $p(y)$
 \otimes

(e) $\Box\Diamond p \models \Diamond p$

解答 KD4 妥当

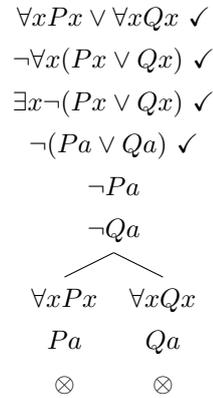
$\Box\Diamond p(x)$
 $\neg\Diamond p(x) \checkmark$
 $\Box\neg p(x)$
 xRy serial
 $\Diamond p(y) \checkmark$
 yRz
 $p(z)$
 xRz trans.
 $\neg p(z)$
 \otimes

4. 次の推論が妥当であるかどうかをタブローを使って示し、非妥当の場合は反例モデルも示しなさい。

(各7点)

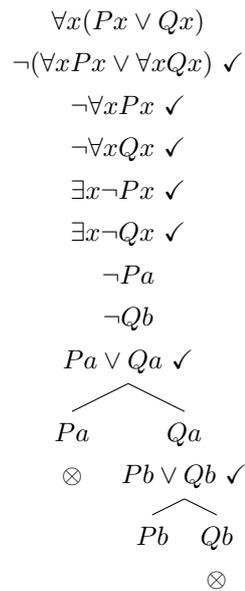
(a) $\forall x Px \vee \forall x Qx \models \forall x (Px \vee Qx)$

解答 妥当



(b) $\forall x (Px \vee Qx) \models \forall x Px \vee \forall x Qx$

解答 非妥当。反例モデル： $D = \{a, b\}, v(P) = \{b\}, v(Q) = \{a\}$



(c) $\forall x \forall y Rxy \models \forall y \forall x Rxy$

解答 妥当

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y Rxy \\ & \neg \forall y \forall x Rxy \checkmark \\ & \exists y \neg \forall x Rxy \checkmark \\ & \neg \forall x Rxa \checkmark \\ & \exists x \neg Rxa \checkmark \\ & \neg Rba \\ & \forall y Rby \\ & Rba \\ & \otimes \end{aligned}$$

5. 次の推論が妥当であるかどうかをタブローを使って示し、非妥当の場合は反例モデルも示しなさい。(各7点)

(a) $\neg(p \rightarrow q) \models p$

解答 非妥当。反例モデルは省略 (付値は $v(x, p) = 0, v(y, p) = 1, v(y, q) = 0$)。

$$\begin{aligned} & \neg \Box(p \rightarrow q) (x) \checkmark \\ & \neg p (x) \\ & \Diamond \neg(p \rightarrow q) (x) \checkmark \\ & xRy \\ & \neg(p \rightarrow q) (y) \checkmark \\ & p (y) \\ & \neg q (y) \end{aligned}$$

(b) $\models (p \wedge \neg p) \rightarrow q$

解答 妥当

$$\begin{aligned} & \neg \Box((p \wedge \neg p) \rightarrow q) (x) \checkmark \\ & \Diamond \neg((p \wedge \neg p) \rightarrow q) (x) \checkmark \\ & xRy \\ & \neg((p \wedge \neg p) \rightarrow q) (y) \checkmark \\ & p \wedge \neg p (y) \checkmark \\ & \neg q (y) \\ & p (y) \\ & \neg p (y) \\ & \otimes \end{aligned}$$

6. この授業に対するご意見や感想、改善の提案などがあれば自由に書いてください。(何らかの記入があれば2点)

回答 直観主義論理が十分に理解できなかったというご指摘がありました。時間不足で十分に説明できなかったため、申し訳なく思っています。希望者対象の補講を行います。また、黒板全体が映るようにカメラを配置してほしい、というご要望もありました。今後、気をつけます。

参考情報（2024年6月10日現在）

● 定期試験結果

履修登録数	定期試験受験者数	放棄	定期試験平均点
8	7	1	70.7

● 得点分布

S (100-90)	A (89-80)	B (79-70)	C (69-60)	59-	放棄
1	3	0	1	2	0

59点以下の2名に追試を提案し、1名が受験し、その1名にCの評価を与えました。

定期試験上位得点者: 92点1名